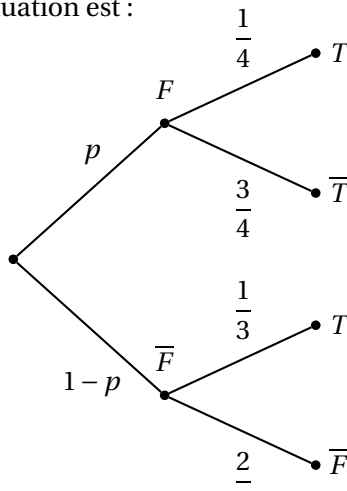


Exercice 1

Partie A

Notons p la probabilité que le membre choisi au hasard soit une femme.
L'arbre de probabilités correspondant à la situation est :



1. $T = (T \cap F) \cup (T \cap \bar{F})$. C'est une réunion d'événements incompatibles, donc :

$$p(F) = p(T \cap F) + p(T \cap \bar{F}) = p_F(T)p(F) + p_{\bar{F}}(T)p(T).$$

Par conséquent : $p(T) = p \times \frac{1}{4} + (1-p) \times \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right)p + \frac{1}{3} = -\frac{1}{12}p + \frac{1}{3}$

On sait que $p(T) = 0,3 = \frac{3}{10}$.

On en déduit : $-\frac{1}{12}p + \frac{1}{3} = \frac{3}{10} \iff \frac{p}{12} = \frac{1}{3} - \frac{3}{10} = \frac{1}{30}$ d'où $p = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$.

La probabilité de l'événement F est : $p(F) = \frac{2}{5}$

2. $p_{T(F)} = \frac{p(F \cap T)}{p(T)} = \frac{\frac{p}{4}}{\frac{3}{10}} = \frac{10p}{3 \times 4} = \frac{5p}{6} = \frac{5}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$; $p_{\bar{T}(F)} = \frac{1}{3}$

Partie B

1. (a) Soit N la variable aléatoire donnant le nombre de membres adhérant à la section tennis parmi les membres choisis.

Nous avons répétition d'une expérience aléatoire à deux issues, identique et indépendante. N suit donc la loi

binomiale de paramètres $n = 4$ (nombre d'épreuves) et $p = \frac{3}{10}$: $N \mapsto \mathcal{B}\left(4; \frac{3}{10}\right)$.

On sait alors que $p(N = k) = \binom{4}{k} \times \left(\frac{3}{10}\right)^k \times \left(1 - \frac{3}{10}\right)^{4-k} = \binom{4}{k} \times \frac{3^k}{10^4} \times 0,7^{4-k}$.

D'où : $p(N = 2) = \binom{4}{2} \times \frac{3^2}{10^4} \times 0,7^2 = \frac{1323}{5000} \approx 0,2646$.

(b) Cette fois, N suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n; \frac{3}{10}\right)$.

$p_n = p(N \geq 1) = 1 - p(N = 0) = 1 - \binom{n}{0} \times \left(\frac{3}{10}\right)^0 \times \left(\frac{7}{10}\right)^n = 1 - \left(\frac{7}{10}\right)^n$: $p_n = 1 - \left(\frac{7}{10}\right)^n$.

(c) $p_n \geq 0,99 \iff 0,01 \geq 0,7^n \iff \ln(0,01) \geq n \ln(0,7)$ (en appliquant la fonction ln qui est croissante)

d'où $n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,7)} \approx 12,9$.

Il faut que n soit supérieur ou égal à 13 pour que p_n soit supérieur à 0,99.

2. (a) Le nombre de tirages possibles de deux jetons est $\binom{100}{2} = 4950$.

X peut prendre les valeurs 35 (deux jetons gagnants), 15 (un seul jeton gagnant) et -5 (deux jetons perdants).

$$p(X=2) = \frac{\binom{10}{2}}{\binom{100}{2}} = \frac{45}{4950} = \frac{1}{110}.$$

$$p(X=0) = \frac{\binom{90}{2}}{\binom{100}{2}} = \frac{4005}{4950} = \frac{89}{110}$$

$$p(X=1) = 1 - [p(X=0) + p(X=2)] = 1 - \left(\frac{1}{110} + \frac{89}{110} \right) = 1 - \frac{90}{110} = \frac{20}{110} = \frac{2}{11}.$$

La loi de probabilité de X est donc :

x_i	-5	15	35
$p(X=x_i)$	$\frac{89}{110}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{1}{110}$

(b) L'espérance est $E(X) = \sum_i x_i p(X=x_i) = -5 \times \frac{89}{110} + 15 \times \frac{2}{11} + 35 \times \frac{1}{110} = -\frac{110}{110} = -1$. $E(X) = -1$.

Cela signifie qu'en moyenne, sur un grand nombre de partie, le joueur perd 1 euro par partie.

Exercice 2

Partie A : Restitution organisée des connaissances

On effectue un changement de variable, en posant $X = \ln(x)$; alors $x = e^X$.

Lorsque x tend vers $+\infty$, X tend aussi vers $+\infty$.

Par conséquent : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X}{e^X} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^X} = 0$ d'après le rappel.

Partie B

1. Soit g la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par $g(x) = x^2 - 1 + \ln(x)$.

g est dérivable sur $[1; +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables.

Pour tout $x \in [1; +\infty[$, $g'(x) = 2x + \frac{1}{x} > 0$ (somme de nombres positifs).

g est donc croissante sur $[1; +\infty[$.

$g(1) = 0$.

Le tableau de variation de g est donc :

x	1	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	0	

Le minimum de g est 0, donc $g(x)$ est positif pour tout $x \in [1; +\infty[$.

2. (a) f est dérivable sur $[1; +\infty[$ comme somme et quotient de fonctions dérivables sur $[1; +\infty[$.

Pour tout $x \in [1; +\infty[$, $f'(x) = 1 - \left[\frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x)}{x^2} \right] = 1 - \frac{1 - \ln(x)}{x^2} = \frac{x^2 - 1 + \ln(x)}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$ donc $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

(b) Comme $x^2 > 0$ sur $[1; +\infty[$, $f'(x)$ est du signe de $g(x)$, donc positif sur $[1; +\infty[$ avec $f'(1) = 0$.

(c) Pour tout $x \in [1; +\infty[$, $f(x) - x = -\frac{\ln(x)}{x}$.

D'après la partie A, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = 0$.

La droite \mathcal{D} d'équation $y = x$ est donc asymptote à \mathcal{C} au voisinage de $+\infty$.

(d) Pour tout $x \in [1; +\infty[$, $f(x) - x = -\frac{\ln(x)}{x} < 0$ car $\ln(x) \geq 0$ et $x > 0$.

La courbe \mathcal{C} est donc en dessous de son asymptote \mathcal{D} (avec intersection en $x = 1$).

3. (a) On a donc $M_k N_k = y_{N_k} - y_{M_k} = \frac{\ln(k)}{k}$.

(b) L'algorithme est :

```
1  VARIABLES
2  k EST_DU_TYPE NOMBRE
3  DEBUT_ALGORITHME
4  k PREND_LA_VALEUR 2
5  TANT_QUE (log(k)/k>0.01) FAIRE
6  DEBUT_TANT_QUE
7  k PREND_LA_VALEUR k+1
8  FIN_TANT_QUE
9  AFFICHER k
10 FIN_ALGORITHME
```

Exercice 3

Partie A

1. Pour tout $x \in [0; 1]$, $f'(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0$, donc f est croissante sur $[0; 1]$.

2. Soit g la fonction définie sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ par $g(x) = f(\tan(x))$.

(a) g est dérivable sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ comme composée de fonctions dérivables. $g'(x) = \tan'(x) \times f'(\tan(x)) = (1 + \tan^2 x) \times \frac{1}{1 + \tan^2 x} = 1$. $g'(x) = 1$

(b) Puisque $g'(x) = 1$ sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, $g(x) = x + k$, $k \in \mathbb{R}$.

$g(0) = f(\tan(0)) = f(0) = 0$ donc $k = 0$, d'où $g(x) = x$.

$f(1) = f\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$ car $g(x) = x$.

3. f est croissante sur $[0; 1]$. $f(0) = 0$ et $f(1) = \frac{\pi}{4}$ donc, pour tout $x \in [0; 1]$, $0 \leq f(x) \leq \frac{\pi}{4}$

Partie B

Soit (I_n) la suite définie par $I_0 = \int_0^1 f(x) dx$ et, pour tout entier naturel n non nul, $I_n = \int_0^1 x^n f(x) dx$.

1. $I_0 = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 [1 \times f(x)] dx$.

On pose $u'(x) = 1$. u' et f' sont continues, donc on peut effectuer une intégration par parties :

$$\int_0^1 [1 \times f(x)] dx = \int_0^1 u'(x) f(x) dx = [u(x) f(x)]_0^1 - \int_0^1 u(x) f'(x) dx = [x f(x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx$$

$$= f(1) - \left[\frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln(2).$$

2. (a) Pour tout $x \in [0; 1]$, $x^n f(x) \geq 0$ (produit de fonctions positives), donc $I_n \geq 0$ (positivité de l'intégrale).

(b) Pour tout $x \in [0; 1]$, $f(x) \leq \frac{\pi}{4}$, donc $I_n = \int_0^1 x^n f(x) dx \leq \int_0^1 \frac{\pi}{4} x^n dx = \frac{\pi}{4} \int_0^1 x^n dx = \frac{\pi}{4} \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1$

$$= \frac{\pi}{4} \times \frac{1}{n+1} = \frac{\pi}{4(n+1)}.$$

Pour tout $n \geq 0$, $I_n \leq \frac{\pi}{4(n+1)}$

(c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4(n+1)} \right) = 0$, donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$

Exercice 4 (pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

On considère l'application f du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = z^2$.

On note Ω le point d'affixe 1.

1. $f(M) = M \Leftrightarrow z^2 = z \Leftrightarrow z^2 - z = 0 \Leftrightarrow z(z-1) = 0 \Leftrightarrow z \in \{0; 1\}$. $\Gamma_1 = \{O; \Omega\}$

2. Soit A le point d'affixe $a = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$.

(a) $a = \sqrt{2}(1-i)$ donc $|a| = \sqrt{2}|1-i| = \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$.

On en déduit $a = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

(b) On cherche les antécédents de A , c'est à dire les points d'affixe z tels que $z^2 = a$.

Posons $z = re^{i\theta}$. Alors $z^2 = r^2 e^{i(2\theta)}$.

On doit avoir $r^2 = 2$ donc $r = \sqrt{2}$ (car $r > 0$).

$2\theta = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ donc $\theta = -\frac{\pi}{8} + k\pi$.

On prend $\theta = -\frac{\pi}{8}$ et $\theta = \frac{7\pi}{8}$.

On trouve $z_1 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{8}}$ et $z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{8}} = -\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{8}} = -z_1$.

Les deux points ont pour affixe $z_1 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{8}}$ et $z_2 = -z_1$.

3. On cherche z tel que $z' \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z^2 \in i\mathbb{R}$.

On pose $z = x + iy$; alors $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$.

$z^2 \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow (x+y)(x-y) = 0 \Leftrightarrow y = -x$ ou $y = x$.

Γ_2 est la réunion des deux droites d'équation $y = -x$ et $y = x$.

4. Dans cette question, on souhaite déterminer l'ensemble Γ_3 des points M distincts de Ω pour lesquels le triangle $\Omega MM'$ est rectangle isocèle direct en Ω .

(a) L'écriture complexe de la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$ est :

$z' - z_\Omega = e^{i\frac{\pi}{2}}(z - z_\Omega) \Leftrightarrow z' - 1 = i(z - 1) \Leftrightarrow z' = i(z - 1) + 1$. (avec $z \neq 1$, car $M \neq \Omega$)

Or $z' = z^2$ donc $z^2 = i(z - 1) + 1$ d'où $z^2 - iz - 1 + i = 0$.

(b) Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $(z-1)(z+1-i) = z^2 + (1-i)z - z - 1 + i = z^2 - iz - 1 + i$

donc : $z^2 - iz - 1 + i = (z-1)(z+1-i)$

(c) $z^2 - iz - 1 + i = (z-1)(z+1-i) = 0 \Leftrightarrow (z-1)(z+1-i) = 0$.

Dans \mathbb{C} , un produit de facteurs est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul.

Les solutions sont $z = 1$ et $z = -1 + i$. Or $z \neq 1$ donc Γ_3 est constitué de l'unique point d'affixe $-1 + i$.

5. Soit M un point d'affixe z différente de 0 et de 1.

(a) Pour $z \neq 0$ et $z \neq 1$, $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \arg\left(\frac{z'}{z}\right) = \arg\left(\frac{z^2}{z}\right) = \arg(z)$.

(b) Les points O, M et M' sont alignés si, et seulement si, $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = 0 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ donc $\arg(z) = k\pi$.

On en déduit que Γ_4 est l'axe des réels, privé des points de O et de Ω .

Exercice 4 (pour les candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)

Partie A

1. $z' = 5iz + 6i + 4$; l'écriture complexe est de la forme $z' = az + b$, donc il s'agit d'une similitude directe de rapport

$$|a| = 5, \text{ d'angle } \arg(5i) = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Le point fixe } \Omega \text{ a pour affixe } \omega = \frac{b}{1-a} = \frac{6i+4}{1-5i} = -1+i.$$

2. Avec les notations de l'énoncé, on a : $z' = x' + iy' = 5i(x + iy) + 6i + 4$ d'où $\begin{cases} x' = -5y + 4 \\ y' = 5x + 6 \end{cases}$

Partie B

1. (a) Soit l'équation $4a + 3b = 5$; Le couple $(5; -5)$ est un couple solution.

On en déduit $4(a-5) = 3(-b-5)$.

4 et -3 sont premiers entre eux. D'après le théorème de Gauss, 3 divise $a-5$ d'où $a-5 = 3k, k \in \mathbb{Z}$.

Alors $-b-5 = 4k$.

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{(5+3k; -5-4k), k \in \mathbb{Z}\}$.

(b) $-3x' + 4y' = 37 \Leftrightarrow 15y - 12 + 20x + 24 = 37 \Leftrightarrow 3y + 4x = 5$; voir alors solutions précédentes.

On veut que $M \in (E)$. On doit avoir $-3 \leq 5 + 3k \leq 5$ et $-3 \leq -5 - 4k \leq 5$.

On en déduit $k = -1$ ou $k = -2$.

Il y a donc deux couples solutions $(2; -1)$ et $(-1; 3)$.

2. (a) $x' + y' = -5y + 4 + 5x + 6 = -5y + 5x + 10 \equiv 0 [5]$ donc $x' + y'$ est un multiple de 5.

(b) $(x' - y') - (x' + y') = -2y' \equiv 0 [2]$.

$$x'^2 - y'^2 = (x' - y')(x' + y').$$

Si $x'^2 - y'^2 \equiv 0 [2]$, alors 2 divise $(x' - y')(x' + y')$. Il est facile de montrer que 2 divise l'un des facteurs (sinon, les deux facteurs sont congrus à 1 modulo 2, donc leur produit aussi).

On en déduit que $x' - y' \equiv 0 [2]$ et $x' + y' \equiv 0 [2]$.

(c) Si $x'^2 - y'^2 = 20$, alors $x' + y'$ et $x' - y'$ sont des multiples de 2 d'après ce qui précède. $x' - y' = 2d$ et $x' + y' = 2d'$ donc $(x' - y')(x' + y') = 4dd' = 20$ donc $dd' = 5$.

5 est premier. On regarde alors toutes les possibilités :

On a alors :

- $d = 1$ ou $d' = 5$
- $d = 5$ ou $d' = 1$
- $d = 1$ ou $d' = -5$
- $d = -5$ ou $d' = -1$

On obtient alors respectivement :

- $x' - y' = 2$ et $x' + y' = 10$ d'où $x' = 6$ et $y' = 4$.
- $x' - y' = 10$ et $x' + y' = 2$ d'où $x' = 6$ et $y' = -4$.
- $x' - y' = -2$ et $x' + y' = -10$ d'où $x' = -6$ et $y' = -4$.
- $x' - y' = -10$ et $x' + y' = -2$ d'où $x' = -6$ et $y' = 4$.

Si $x' = 6$ et $y' = 4$, alors $6 = -5y + 4$ et $4 = 5x + 5$ d'où $y = -\frac{2}{5}$ et $x = -\frac{2}{5}$. $M \notin E$

Si $x' = 6$ et $y' = -4$, alors $6 = -5y + 4$ et $-4 = 5x + 5$ d'où $y = -\frac{2}{5}$ et $x = 2$. $M \notin E$

Si $x' = -6$ et $y' = -4$, alors $-6 = -5y + 4$ et $-4 = 5x + 5$ d'où $y = 2$ et $x = -2$. $M \in E$

Si $x' = -6$ et $y' = 4$, alors $-6 = -5y + 4$ et $4 = 5x + 5$ d'où $y = 2$ et $x = -\frac{2}{5}$. $M \notin E$. Il n'a donc qu'une seule

solution : $(-2; 2)$